核反应堆物理分析

主讲：贺晓涛 (hext@nuaa.edu.cn)

第三章 单能中子扩散理论

何为“反应堆物理”？

- 反应堆物理（Reactor physics）： 研究反应堆内**中子行为**的科学。
- 中子在堆内的状态与哪些量有关：
  ① 空间位置 $\vec{r}(x,y,z)$
  ② 能量E(v)
  ③ 运动方向 $\vec{\Omega}(\theta,\phi)$
  ④ 时间t（非稳态）
- 中子在介质内的输运过程：$t,\vec{r},v,\vec{\Omega} \longrightarrow t_1,\vec{r}_1,v_1,\vec{\Omega}_1$

核反应堆物理的核心问题是什么？

- 描述中子输运过程的精确方程：波尔兹曼输运方程。

- 反应堆物理的中心问题之一：就是预言这一分布，确定堆内中子数密度或中子通量密度$\phi(\vec{r},E,\vec{\Omega})$ 。

求解中子通量密度分布的基本方法：

- 确定性方法
  - 根据具体问题建立数学模型，用数学物理方程来表示并利用数学方法求出它的精确或近似的解
  - 优点：计算快速，相对精确
  - 缺点：模型简化，大型多维问题需要大量计算时间及存储空间

- 非确定性方法（蒙特卡罗方法，Monte Carlo method）
  - 基于统计（或概率）理论的数值方法，是通过计算机的随机模拟来跟踪中子在介质中的运动。
  - 优点：计算精确，可以模拟三维复杂几何模型。
  - 缺点：计算非常耗时。

简化问题

假设反应堆处于稳态： $\phi(t,\vec{r},E,\vec{\Omega}) \Rightarrow \phi(\vec{r},E,\vec{\Omega})$

波尔兹曼输运方程

$\Downarrow$ 中子通量密度的角分布各向同性

扩散方程

$\Downarrow$ 中子通量密度可分离变量

即：$\phi(\vec{r},E)=\varphi(E)\phi(\vec{r})$

慢化方程

单能中子扩散方程

$$\phi(\vec{r},E,\vec{\Omega}) \Rightarrow \phi(\vec{r},E) \Rightarrow \varphi(E),\ \phi(\vec{r})$$

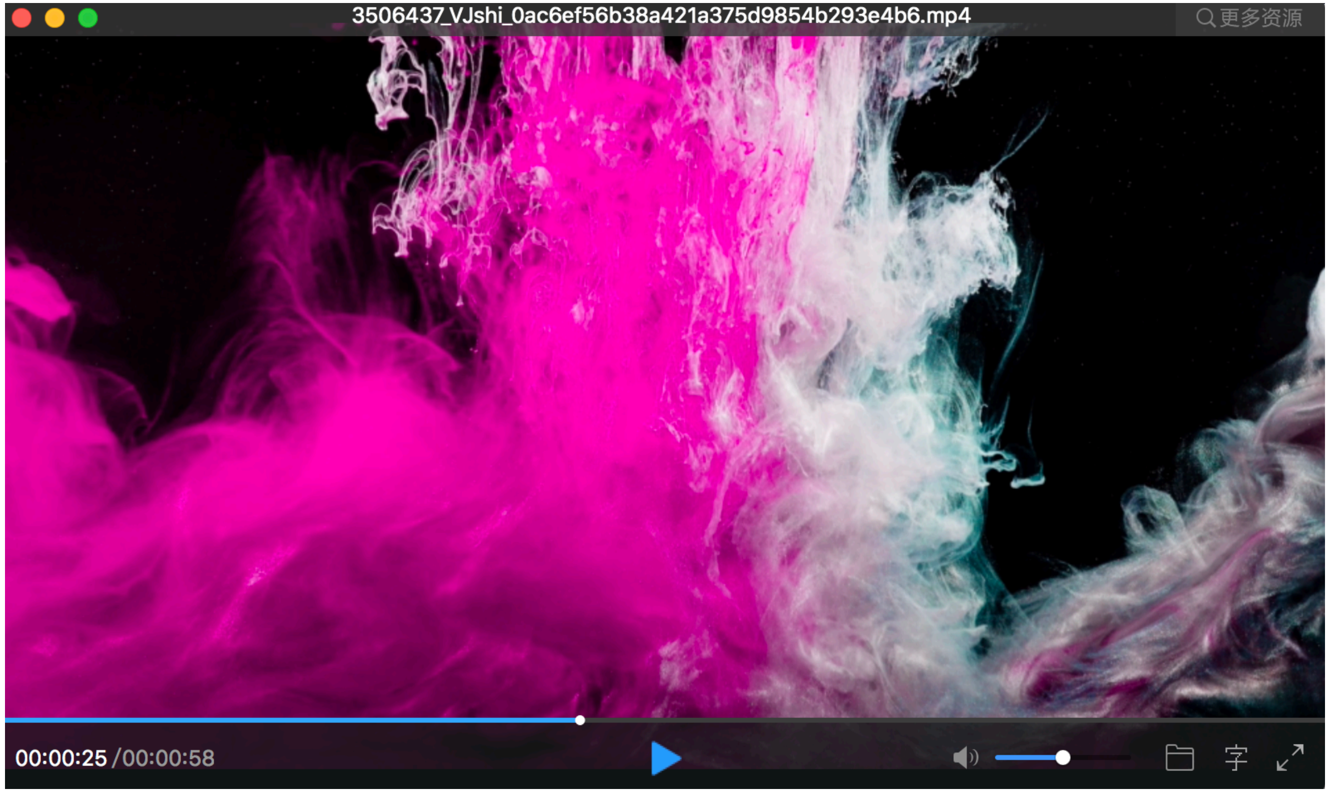
§3.2 斐克定律

分子的扩散现象：

- 分子间的无规则碰撞
- 浓度大→浓度小
- 服从斐克扩散定律

⇩

分子扩散的速率与分子密度的梯度成正比。



彩墨在水中的扩散视频

§3.2 斐克定律

分子的扩散现象：

- 分子间的无规则碰撞
- 浓度大→浓度小
- 服从斐克扩散定律

⇓

分子扩散的速率与分子密度的梯度成正比。

中子的扩散现象：

- 中子与介质原子核散射碰撞
- 密度高→密度低
- 服从斐克扩散定律

斐克定律的证明：

考虑**稳态情况**，即：中子通量密度不随时间变化，

同时假设：

① 介质是无限的、均匀的

② 在实验室坐标系中散射是各向同性的

③ 介质的吸收截面很小，即：$\Sigma_a \ll \Sigma_s$

④ 中子通量密度是随空间位置缓慢变化的函数

$dV = dldAcos\theta$ 内, 每秒发生散射的中子数目为：

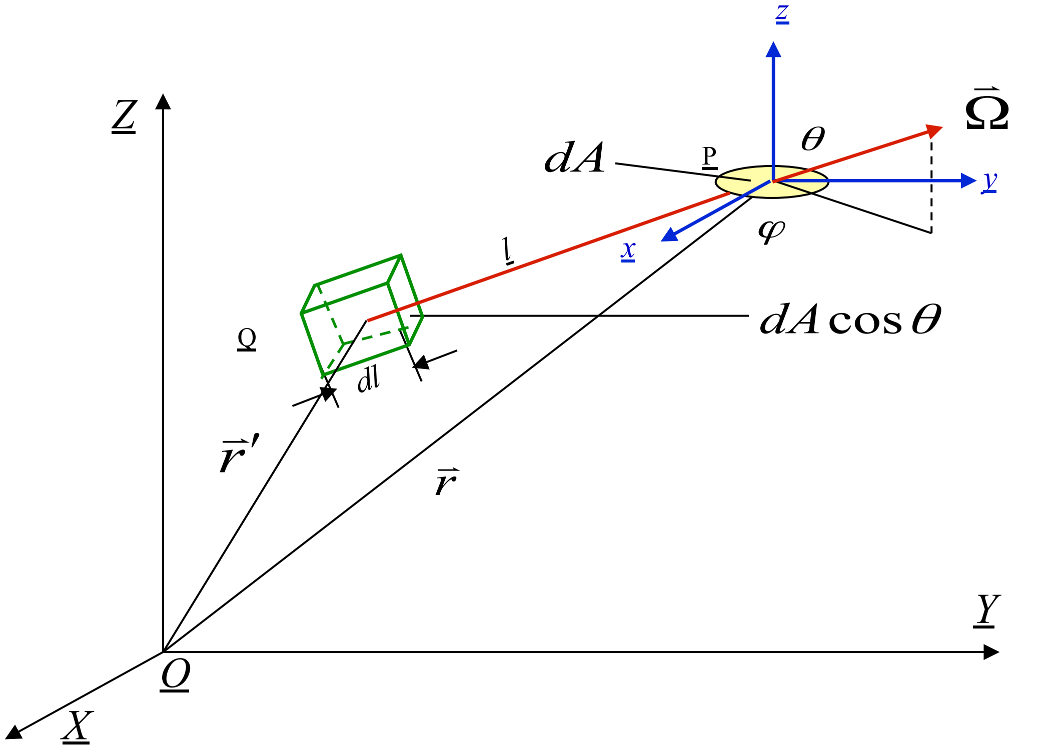
$$\Sigma_s\phi(\vec{r'})dV$$

每秒dV内散射沿着 $\vec{\Omega}(\theta,\phi)$ 方向单位立体角运动的中子数是：

$$\frac{\Sigma_s\phi(\vec{r'})dV}{4\pi}$$

沿着 $\vec{\Omega}$ 方向散射的中子，

实际能到达dA的几率: $e^{-\Sigma_t|l|} \xrightarrow{\Sigma_a \ll \Sigma_s} e^{-\Sigma_s|l|}$



每秒自dV内散射出来沿着 $\vec{\Omega}$ 方向未经碰撞能到达dA上的中子数是：

$$\frac{1}{4\pi}\Sigma_s\phi(\vec{r'})e^{-\Sigma_s|l|}cos\theta dAdl$$

沿 $\vec{\Omega}$ 方向每秒穿过*d*A的中子数便等于沿*l*方向从-∞到0的积分：

$$\frac{dA}{4\pi}\int_{\infty}^{0}\Sigma_s\boxed{\phi(\vec{r'})}\boxed{e^{-\Sigma_s|l|}}cos\theta dl$$

缓慢变化

随距离按指数迅速减小

把 $\phi(\vec{r'})$ 在*P*(*r*)点处按泰勒级数展开：

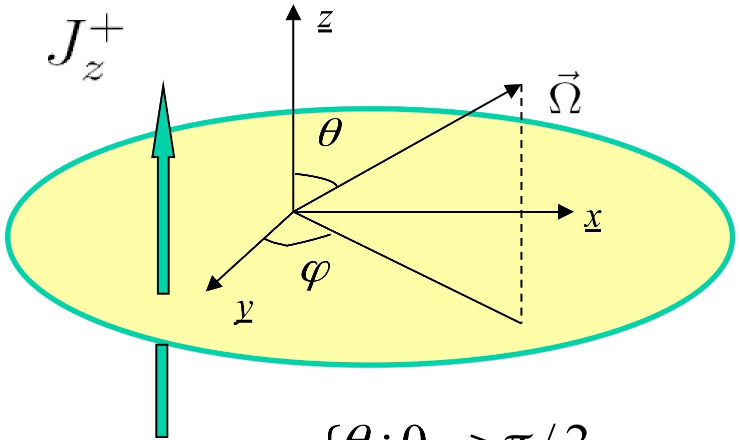
$$\phi(\vec{r'}) = \phi(\vec{r}) + l\frac{d\phi}{dl} + \cdots$$

沿 $\vec{\Omega}$ 方向每秒穿过*d*A的中子数为：

$$\frac{dA}{4\pi}cos\theta\left[\phi(\vec{r}) - \frac{1}{\Sigma_s}\frac{d\phi}{dl}|_{r=r}\right]$$

J_z^+：沿Z轴正方向的分中子流密度，

即：每秒自xoy平面（沿正Z方向）自下向上穿过dA上单位面积的中子数。



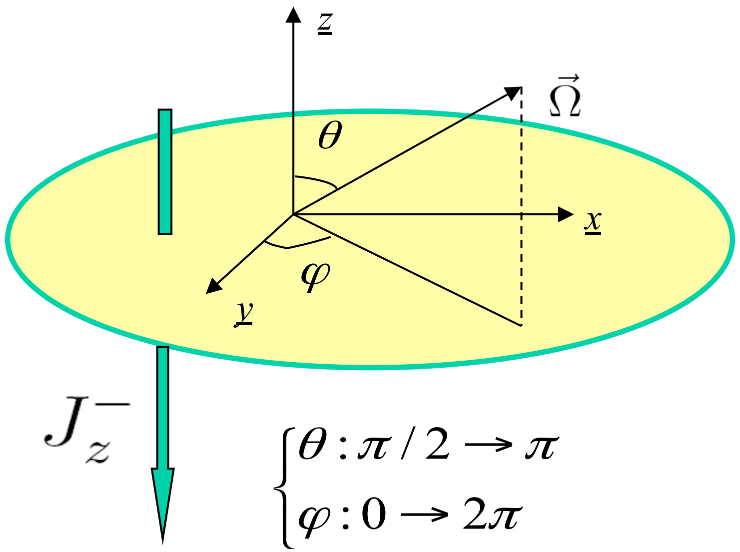
$$\begin{cases}\theta: 0 \to \pi/2 \\ \varphi: 0 \to 2\pi\end{cases}$$

对 $(\vec{\Omega}\cdot\vec{e}_z)>0$ 的半个空间的所有 $\vec{\Omega}$ 方向积分，得：

$$J_z^+(\vec{r}) = \frac{\phi(\vec{r})}{4} - \frac{1}{6\Sigma_s}\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial z}$$

J_z^-：沿Z轴负方向的分中子流密度，

即：每秒自xoy平面（沿正Z方向）自上向下穿过dA上单位面积的中子数。



$$\begin{cases}\theta:\pi/2\to\pi\\ \varphi:0\to 2\pi\end{cases}$$

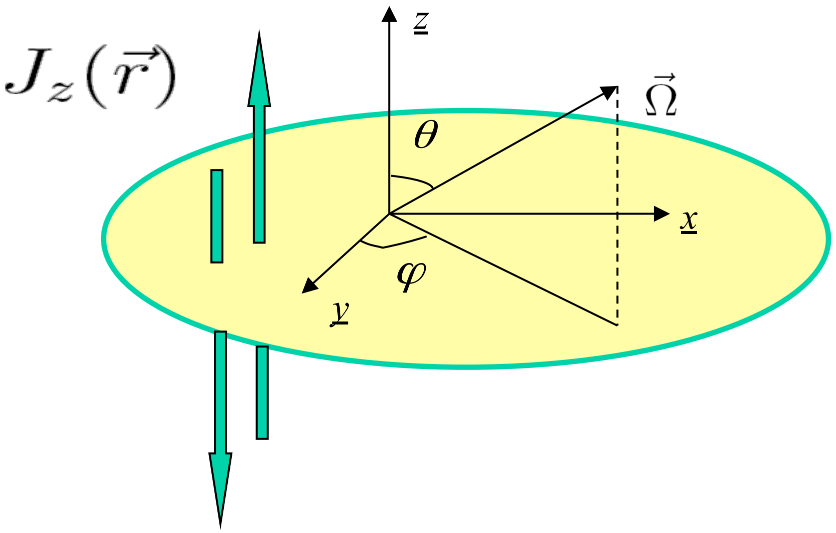
对 $\vec{\Omega}$ 的积分沿 $(\vec{\Omega}\cdot\vec{e}_z)<0$ 的半个空间积分，得：

$$J_z^-(\vec{r})=\frac{\phi(\vec{r})}{4}+\frac{1}{6\Sigma_s}\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial z}$$

单位时间内沿着z方向穿过dA平面上单位面积的**净中子数**为：

$$J_z(\vec{r}) = J_z^{+}(\vec{r}) - J_z^{-}(\vec{r})$$

$$= -\frac{\lambda_s}{3}\frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial z}$$



$J_z(\vec{r})$ ：z方向的**中子流密度**（**净中子流密度**），表示r处沿z方向的中子**净流动速度**。

同理：

沿*x*方向穿过*d*A平面单位面积的净中子流密度：

$$J_x(\vec{r}) = -\frac{\lambda_s}{3}\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x}$$

沿*y*方向穿过*d*A平面单位面积的净中子流密度：

$$J_y(\vec{r}) = -\frac{\lambda_s}{3}\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial y}$$

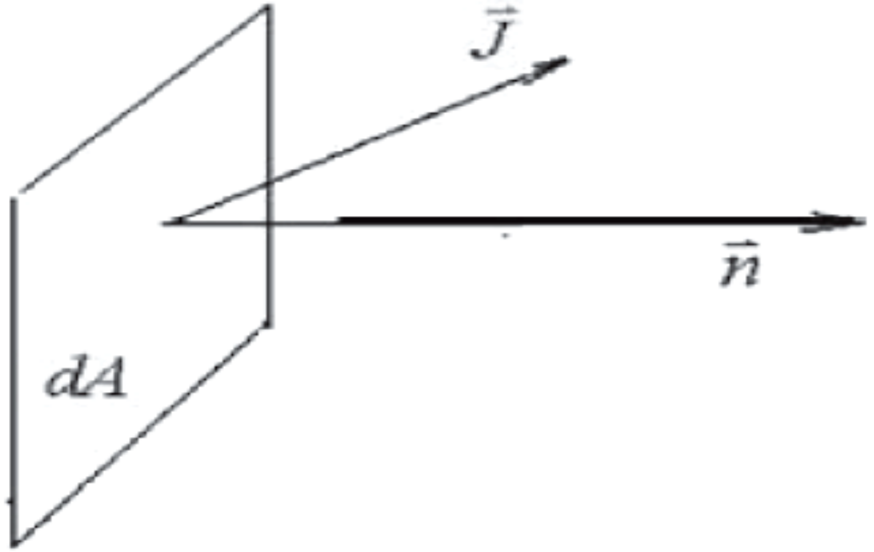
中子流密度矢量：

$$\boxed{\vec{J} = J_x\vec{i} + J_y\vec{j} + J_z\vec{k} = -\frac{\lambda_s}{3}grad\phi}$$

如果某平面与中子流密度矢量方向不垂直，

该平面的法线方向（单位）向量：

$$\vec{n} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$$



那么每秒通过该平面上单位面积的净中子数是，

$$J_n = \vec{J}\cdot\vec{n}$$

$$J = -\frac{\lambda_s}{3}\left[\ \frac{\partial\varphi(r)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\varphi(r)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\varphi(r)}{\partial z}\cos\gamma\ \right]$$

斐克定律（Fick's law）：

$$\boxed{\vec{J} = -D\,grad\,\phi}$$

它表示：中子流密度 $\vec{J}$ 正比于负的中子通量密度梯度，其比例常数叫做**扩散系数**，并用 D 表示，

$$D = -\frac{\lambda_s}{3}$$

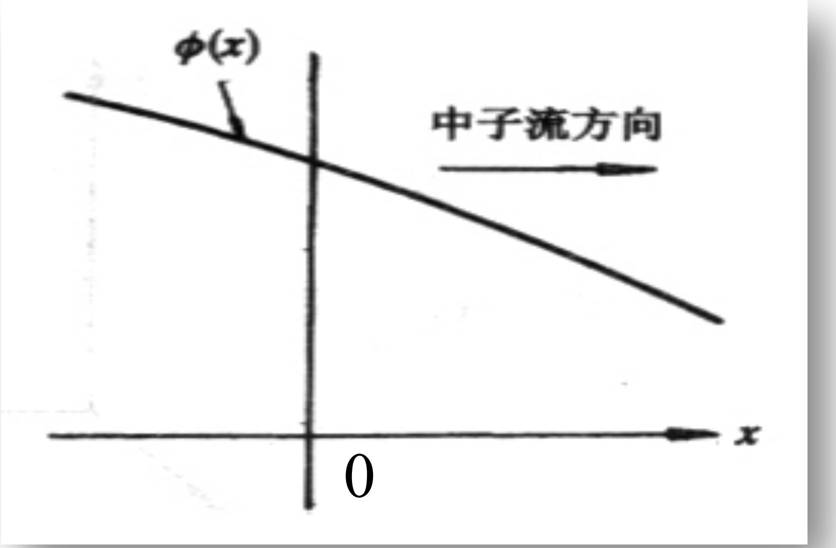
斐克定律的物理解释：

散射反应率：$R_s = \Sigma_s \phi$

散射截面：Σ_s = 常数

中子通量密度：左边 ＞ 右边

$R_{s左} > R_{s右}$

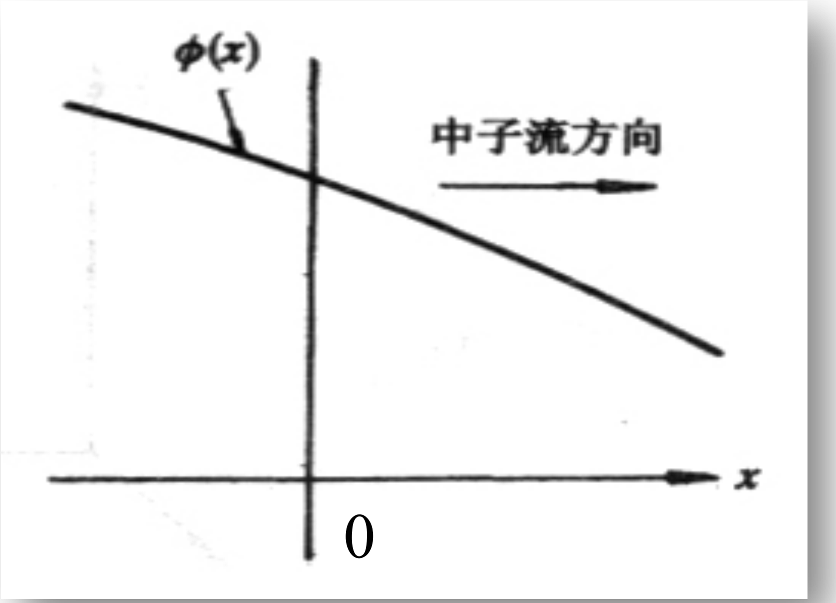


单位时间单位体积，中子散射到右边的比散射到左边的多

- ✓ 结果产生一个沿 x 正方向流动的净中子流。
- ✓ 且x=0两侧中子通量密度的梯度越大，中子流也越大。

斐克定律的物理解释：

$$J_x = -D\frac{d\phi}{dx} \xrightarrow{\frac{d\phi}{dx}<0} J_x > 0$$



- ✓ 净中子流动的 方向：与中子通量密度梯度的方向 相反。

- ✓ 净中子流动的数值：正比于中子通量密度的梯度。

对散射各向异性的修正

用输运平均自由程来代替散射平均自由程，因此：

$$D = \frac{\lambda_s}{3} \longleftarrow D = \frac{\lambda_{tr}}{3}$$

输运平均自由程：

$$\lambda_{tr} = \frac{\lambda_s}{1 - \overline{\mu_0}}$$

实验室系统内的平均散射角余弦：

$$\overline{\mu_0} = \frac{2}{3A}$$

对于重核：

$$\overline{\mu_0} \ll 1 \longrightarrow \lambda_{tr} \approx \lambda_s$$

斐克定律适用条件：

假定：

不适用范围：

假定	不适用范围
介质均匀、无限 →	距真空边界两三个平均自由程的区域。
弱吸收介质 $\Sigma_a \ll \Sigma_s$ →	强吸收体（如控制棒）附近几个自由程内
中子通量密度缓慢变化 →	扩散性质显著不同的交界面附近几个自由程内
中子流密度的贡献仅来自中子与介质原子核的散射碰撞 →	距强中子源两三个平均自由程的区域

衰变因子： $e^{-\Sigma_s|l|}$ （当 $\Sigma_s|l| \approx 3$ ，$e^{-\Sigma_s|l|}<0.05$）

内容总结：

- 扩散近似：假设反应堆内中子通量密度的角分布是各向同性的。

- 中子的扩散服从菲克定律：
  - 中子运动的方向：通量场负梯度方向（中子数密度大→小）
  - 中子流动的数值：正比于中子通量密度的梯度

内容总结：

- 扩散理论（菲克定律）的适用范围：

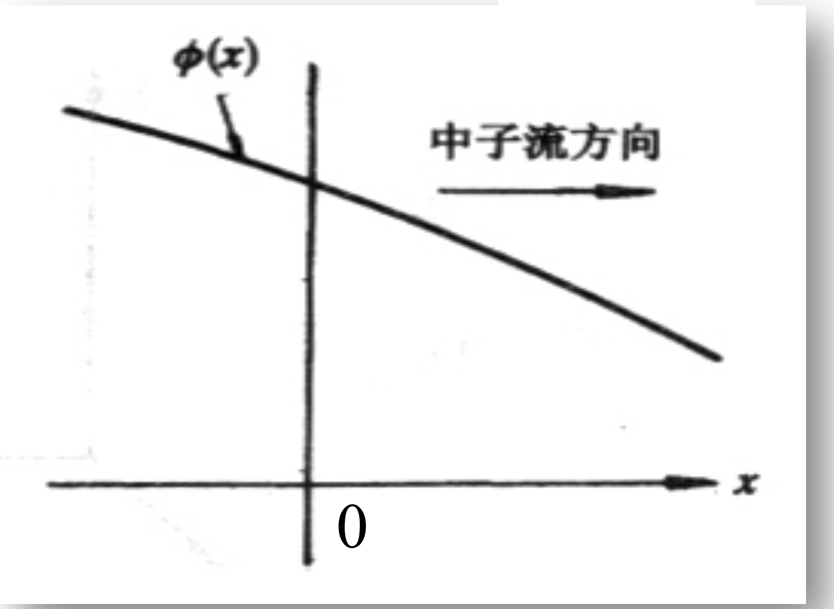
  ！中子通量密度变化较剧烈处不适用！具体包括：

  - 真空边界
  - 强吸收体（如控制棒）
  - 扩散性质显著不同的交界面
  - 强中子源

距离不适用处2-3个平均自由程，扩散理论适用。

课后思考：

❓ 如果右图中纵坐标两侧中子的宏观散射截面不一样，
如何确定X＝0处的中子流密度矢量？



❓ 是否会有从真空到反应堆的中子流？